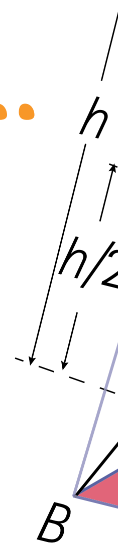
Accromath Vol. 15 • été – automne 2020



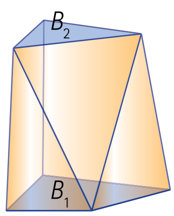
# Formule magique...
## POUR VOLUMES



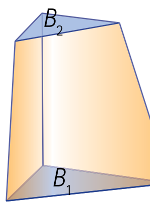

*La plupart d'entre nous savons que le volume d'un prisme correspond à l'aire de sa base multipliée par sa hauteur. Nous savons également que le volume d'une pyramide correspond au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur (autrement dit le volume d'une pyramide est le tiers du volume du prisme correspondant). La formule magique s'applique à ces deux solides. Que diriez-vous si je vous affirmais que la formule magique s'applique également à des solides aussi divers que le cylindre, la sphère et plusieurs autres?*

**Marc-André Désautels***
Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu

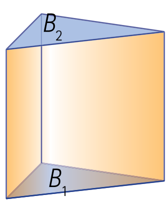
### Un quoi?



Prismatoïde



Prismoïde



Prisme

Avant de voir cette fameuse formule magique, nous devons tout d'abord définir ce qu'est un prismatoïde et du même coup nous définirons ce qu'est un prismoïde et un prisme. Un *prismatoïde* est un polyèdre (un solide dont toutes les faces sont des polygones) tel que tous ses sommets se trouvent sur deux plans *parallèles*. Chaque plan parallèle doit contenir au moins un sommet et au moins un des plans en contient trois. Les faces du polyèdre se trouvant sur ces deux plans parallèles sont appelées les *bases* du prismatoïde et celles-ci sont des polygones. En particulier, si les deux bases du prismatoïde possèdent le même nombre de côtés, le prismatoïde est appelé un *prismoïde*. De plus, si les faces du prismatoïde, sauf les bases, sont des parallélogrammes, le solide est appelé un *prisme*. Les bases $B_1$ et $B_2$ se trouvent dans des plans parallèles[1].

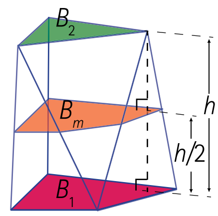
La formule magique (ou prismatoïdale de son vrai nom) peut être utilisée pour plusieurs solides incluant tous les prismatoïdes, les prismoïdes et les prismes.

---

* *L'auteur tient à remercier André Lapierre, pour l'avoir introduit à la formule permettant de calculer des volumes de prismatoïdes.*

1. *Dans cet article, nous ferons un abus de langage et de notation et nous utiliserons les notations $B_1$, $B_2$ et h pour dénoter aussi bien les objets géométriques que les mesures de ces objets.*

### La formule magique (ou prismatoïdale)




À partir du prismatoïde suivant dont nous ne conservons que le *squelette* et trois surfaces, nous présenterons la formule magique.

La formule magique est donnée par:

$$V = \frac{h}{6}\left(B_1 + 4B_m + B_2\right),$$

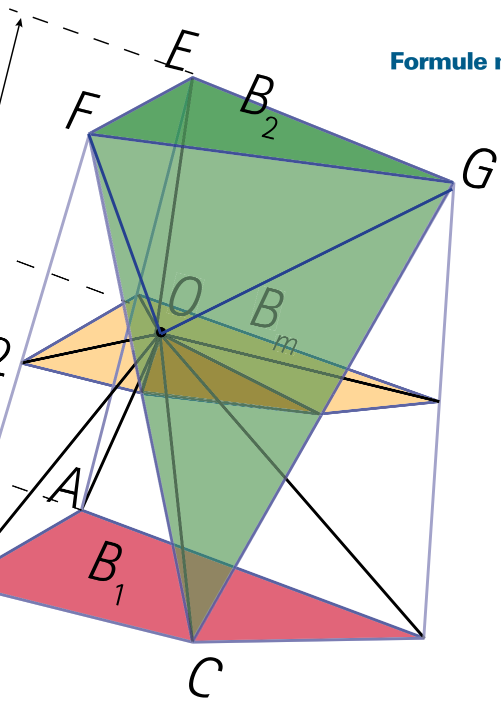
où $h$ correspond à la hauteur du solide, $B_1$ et $B_2$ sont respectivement les aires de la première et de la seconde base, et $B_m$ l'aire médiane du solide, c'est-à-dire l'aire de la section du milieu du solide.

### Les prismes et les pyramides

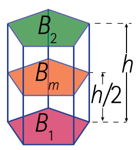
En introduction, nous avons affirmé que la formule magique s'appliquait dans le cas des prismes et des pyramides. Nous allons démontrer cette affirmation.

### Les prismes

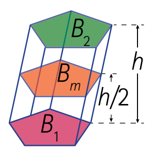
Les prismes sont des prismatoïdes où les polygones dans chaque plan sont congrus et joints par des faces en forme de parallélogrammes.




Les aires des bases $B_1$, $B_2$ et $B_m$ sont toutes les trois égales, c'est-à-dire $B_1 = B_2 = B_m = B$. Nous avons donc:




$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2)$$
$$= \frac{h}{6}(B + 4B + B) = \frac{h}{6}(6B) = Bh.$$




Nous retrouvons donc la formule connue du volume d'un prisme.

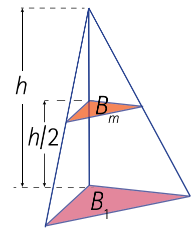
## Une généralisation

Dans le cas des prismes, si toutes les intersections de deux tels solides avec un plan parallèle aux deux plans contenant les bases ont la même aire, nous savons que ces deux solides ont le même volume. C'est ce que nous appelons le principe des indivisibles de Cavalieri. Un tel solide peut être représenté par un empilement de jetons uniformes, placé sur une table, de telle manière que les jetons restent parallèles au dessus de la table. Pour davantage d'informations sur les indivisibles de Cavalieri, la lectrice ou le lecteur peut aller voir (Ross 2017).

Nous pouvons donc généraliser que même si le solide en question n'est pas un prismatoïde mais que nous pouvons trouver son volume à l'aide des indivisibles de Cavalieri, la formule magique s'applique quand même. Nous verrons plus tard que la formule s'applique dans d'autres situations que des volumes de prismatoïdes.

## Les pyramides

Les *pyramides* sont des prismatoïdes pour lesquels un des plans ne contient qu'un seul point. Regardons ce que donnerait la formule prismatoïdale dans ce cas. Une des aires est toujours égale à 0.(choisissons $B_2 = 0$). De plus, l'aire $B_m$ est le quart de l'aire $B_1$ c'est-à-dire $B_m = \frac{B_1}{4}$.




En effet, puisque les longueurs des côtés du triangle de l'aire $B_m$ sont la moitié des longueurs des côtés du triangle de l'aire $B_1$ et que l'aire est proportionnelle aux carrés des longueurs des côtés, l'aire est divisée par 4. Le même argument peut être utilisé pour les pyramides à bases quelconques. Nous avons donc:

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + V_2)$$
$$= \frac{h}{6}\left(B_1 + 4 \times \frac{B_1}{2} + 0\right) = \frac{B_1 h}{2}.$$

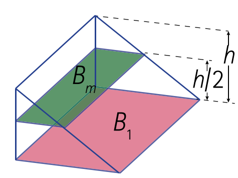
Le résultat précédent est la formule bien connue pour le volume d'une pyramide.

## Quatre solides différents

Plusieurs solides différents sont en fait des cas particuliers de prismatoïdes. Par exemple, les cales, les troncs, les antiprismes et les coupoles. Précisons que nous ne vérifions pas les formules des volumes de ces solides, nous utilisons la formule magique pour trouver ces divers volumes.

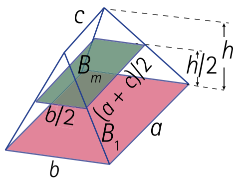
## Les cales (coins)

Un *coin* est un prisme à base triangulaire tourné de telle façon qu'il est posé sur une de ses faces rectangulaires.




On applique la formule magique en considérant qu'une des aires est égale à 0 (choisissons $B_2 = 0$). De plus, l'aire $B_m$ est la moitié de l'autre aire $B_1$, c'est-à-dire $B_m = \frac{B_1}{2}$. Nous avons donc:

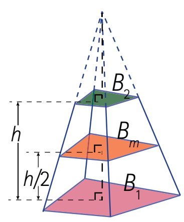
$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + V_2)$$
$$= \frac{h}{6}\left(B_1 + 4 \times \frac{B_1}{2} + 0\right) = \frac{B_1 h}{2}.$$

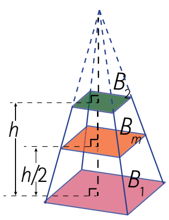



Nous pouvons aussi définir un type plus général de coin, le *coin oblique*, où l'arête supérieure est habituellement raccourcie, mais toujours parallèle à deux des côtés de la base.

On applique à nouveau la formule magique en considérant qu'une des aires est égale à 0 (choisissons $B_2 = 0$). De plus, l'aire $B_m$ est donnée par $b(a+c)/4$ comme présenté sur la figure ci-dessus. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{h}{6}\left(ab + 4 \times \frac{b(a+c)}{4} + 0\right) \\ &= \frac{bh}{6}(2a+c). \end{aligned}$$




## Les troncs

Le volume des troncs obtenus par troncature d'une pyramide peuvent être obtenus par la formule magique. La figure de gauche montre le tronc de pyramide pour lequel nous voulons utiliser la formule magique. Le tronc de pyramide du bas associe un tronc de même volume que le tronc du haut mais ayant comme bases des carrés.

Il est possible de démontrer que l'aire $B_m$ dépend des aires $B_1$ et $B_2$. Voici un argument heuristique permettant le calcul de $B_m$. Par un argument de symétrie, nous pouvons associer à la base $B_1$ un carré de même aire et d'arête $\sqrt{B_1}$, et nous pouvons associer à la base $B_2$ un carré de même aire et d'arête $\sqrt{B_2}$. Nous pouvons ainsi associer à la base $B_m$ un carré d'arête $\left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)/2$, ce qui implique que l'aire de la base $B_m$ est

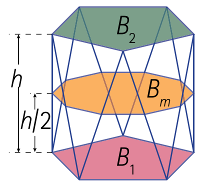
$$\left(\frac{\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}}{2}\right)^2 = \frac{B_1 + 2\sqrt{B_1}\sqrt{B_2} + B_2}{4}.$$

En appliquant la formule magique, nous obtenons:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{h}{6}\left(B_1 + B_1 + 2\sqrt{B_1}\sqrt{B_2} + B_2 + B_2\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1}\sqrt{B_2} + B_2\right). \end{aligned}$$

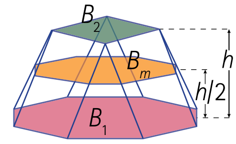
qui correspond au résultat bien connu pour le volume d'un tronc de pyramide.

## Les antiprismes




Les *antiprismes* sont des prismatoïdes où les polygones dans chaque plan sont congrus et joints par des triangles alternés. Les volumes de tous les antiprismes peuvent se calculer à l'aide de la formule magique. Nous ne donnerons pas la formule exacte obtenue, car elle dépend du polygone régulier qui forme les bases $B_1$ et $B_2$ de l'antiprisme, de l'angle par lequel la deuxième base est tournée et de la hauteur.

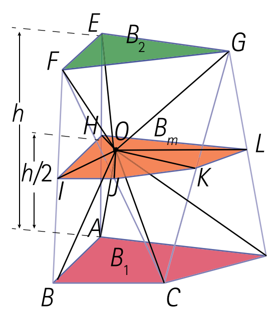
## Les coupoles

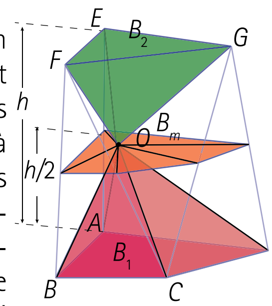



Les coupoles sont des prismatoïdes où le polygone dans un plan contient deux fois plus de points que celui dans le plan opposé, et où les polygones sont joints par une alternance de triangles et de rectangles.

Les volumes de toutes les coupoles peuvent se calculer à l'aide de la formule magique. Puisque le volume d'une coupole dépend des polygones utilisés, nous ne donnerons pas la formule exacte.

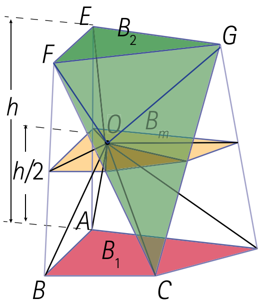
## D'où vient la formule magique?



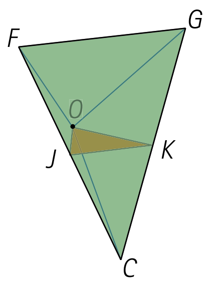




La question que nous pouvons maintenant nous poser est : d'où vient cette formule? Nous allons voir que celle-ci se retrouve à l'aide de quelques dissections judicieusements choisies. À partir d'un prismatoïde général et d'un point $O$ se trouvant sur la base $B_m$, nous joignons ce point $O$ à tous les sommets des bases $B_1$ et $B_2$ ainsi qu'à tous les sommets de la base $B_m$. Le prismatoïde est ainsi partagé dans un certain nombre de pyramides, chacune ayant comme sommet le point $O$. Les deux bases parallèles $B_1$ et $B_2$ forment les bases de deux pyramides.

Le volume d'une pyramide correspond au tiers de l'aire de sa base, multipliée par sa hauteur. Les volumes des deux pyramides représentées ci-contre (rouge et vert) sont donc: $V_1 = \frac{1}{3}B_1 \times \frac{h}{2} = \frac{B_1 h}{6}$ et $V_2 = \frac{1}{3}B_2 \times \frac{h}{2} = \frac{B_2 h}{6}$.




Nous voulons maintenant trouver le volume des pyramides formées par les autres faces du prismatoïde. Nous allons considérer par exemple la pyramide formée par la base $CFG$ et de sommet $O$. Les volumes des autres pyramides dont les bases sont formées par les faces du prismatoïde se trouveraient de la même manière. La pyramide utilisée est de base triangulaire et il est possible de découper notre volume en de multiples pyramides à base triangulaire car les faces du prismatoïde sont nécessairement des triangles, des trapèzes ou des parallélogrammes.




$$\text{aire}(\Delta CFG) = 4 \times \text{aire}(\Delta CJK)$$
$$\text{volume}(OCFG) = 4 \times \text{volume}(OCJK)$$
$$\text{volume}(OCFG) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{h}{2} \times \text{aire}(\Delta OJK)$$
$$= \frac{4h}{6} \times \text{aire}(\Delta OJK).$$

De la même manière que pour la pyramide précédente, nous pouvons trouver le volume de toutes les autres pyramides formant le côté du prismatoïde. Ces volumes seront tous de la forme

$$\frac{4h}{6} \times \text{aire(Triangle)}.$$

Le volume total du prismatoïde est donc:

$$V = \frac{h}{6}B_1 + \frac{h}{6}B_2 + \frac{4h}{6}\underbrace{\left(\text{aire}(\Delta OHI) + \text{aire}(\Delta OHL) + \text{aire}(\Delta OLK) + \text{aire}(\Delta OKJ) + \text{aire}(\Delta OJI)\right)}_{\text{Aire de la base } B_m}$$
$$= \frac{h}{6}B_1 + \frac{h}{6}B_2 + \frac{4h}{6}B_m = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2).$$

N'est ce pas surprenant qu'on ait pu prendre O quelconque? D'après vous, l'argument est-il valide pour n'importe quel point se trouvant sur la surface $B_m$?

## D'autres solides où la formule magique s'applique

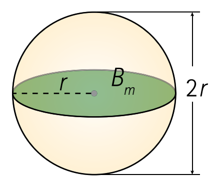
Comme nous venons de le voir, nous pouvons apprendre une seule formule magique pour calculer le volume de polyèdres très diversifiées, qui sont toutes des sous-classes des prismatoïdes. De façon surprenante, la formule magique s'applique à plusieurs autres solides, qui ne sont pas des prismatoïdes ni même des polyèdres.

Dans un premier temps, nous allons vérifier qu'elle fonctionne pour des volumes pour lesquels une formule existe dans la littérature. Ensuite nous allons donner un critère permettant de savoir quand nous pouvons utiliser cette formule.

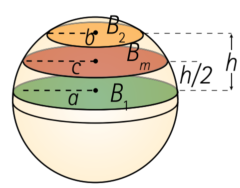
## Le volume d'une sphère ou d'une portion de sphère

Pour le cas d'une sphère de rayon $r$, nous allons choisir la base $B_1$ au pôle sud ($B_1 = 0$) et la base $B_2$ au pôle nord ($B_2 = 0$). La surface médiane correspond à l'aire d'un cercle de rayon $r$, c'est-à-dire $B_m = \pi r^2$. De plus, la hauteur de la sphère correspond à deux fois son rayon, c'est-à-dire $2r$. La formule prismatoïdale nous donne donc:

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2)$$
$$= \frac{2r}{6}(0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$




Nous pouvons également appliquer la formule à une tranche de sphère. Le solide dont nous voulons trouver le volume est celui situé entre les bases $B_1$ et $B_2$.



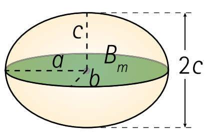
Il est possible de trouver le rayon $c$ du cercle de la surface $B_m$ en fonction du rayon de la base $B_1$, du rayon de la base $B_2$ et de la hauteur $h$. Nous obtenons la relation suivante (voir section *Problèmes*):

$$c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{h^2}{4}.$$

La formule magique nous donnera donc:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{h}{6}\left(\pi a^2 + 4\pi\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{h^2}{4}\right) + \pi b^2\right) \\ &= \frac{\pi h}{6}\left(3a^2 + 3b^2 + h^2\right). \end{aligned}$$

## Le volume d'un ellipsoïde



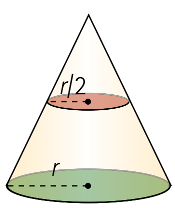

Pour le cas d'un ellipsoïde de demi-axes $a$, $b$ et $c$, par exemple

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

nous allons choisir la base $B_1$ au pôle sud ($B_1 = 0$) et la base $B_2$ au pôle nord ($B_2 = 0$). La surface médiane correspond à l'aire d'une ellipse de demi-axes $a$ et $b$, c'est-à-dire $B_m = \pi ab$. De plus, la hauteur de l'ellipsoïde correspond à deux fois le demi-axe selon l'axe des $z$, c'est-à-dire $2c$. La formule magique nous donne donc:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{2c}{6}(0 + 4\pi ab + 0) = \frac{4\pi abc}{3}. \end{aligned}$$

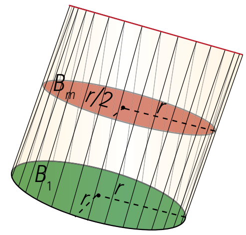
## Le cône ou le tronc de cône




Un exemple similaire est celui d'un cône circulaire droit. L'aire $B_m$ est formée par un cercle de rayon $r/2$ et donc l'aire $B_m$ correspond au quart de l'aire de la base $B_1$. La formule magique nous donne donc:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{h}{6}\left(\pi r^2 + 4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 + 0\right) = \frac{\pi r^2 h}{3}. \end{aligned}$$

## Le conoïde




Un conoïde est une surface dont toutes les droites génératrices sont parallèles à un plan directeur et sont sécantes à une même droite (l'axe du conoïde). Voici un conoïde circulaire droit où la base $B_1$ est un cercle, la base $B_m$ est une ellipse et $B_2 = 0$ (correspond à l'axe du conoïde).

En observant la figure, nous remarquons que le cercle est de rayon $r$, que le conoïde est de hauteur $h$ ainsi que la base $B_m$ est une ellipse d'axes $r$ et $r/2$. La formule magique nous donne donc:

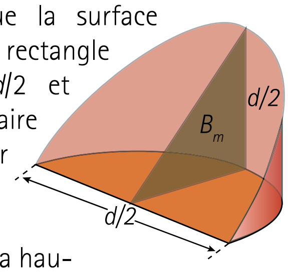
$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{h}{6}\left(\pi r^2 + 4\pi r\left(\frac{r}{2}\right) + 0\right) = \frac{\pi r^2 h}{2}. \end{aligned}$$

## Quelques volumes provenant du cours de calcul intégral

Bien que les volumes suivants ne soient pas des prismatoïdes, la formule magique fonctionne encore ! Par contre, soyez prudent, elle fonctionne pour les volumes présentés mais pas pour tous les volumes imaginables. Nous verrons dans une prochaine section les situations pour lesquelles la formule magique est applicable.

## La coupe d'un arbre

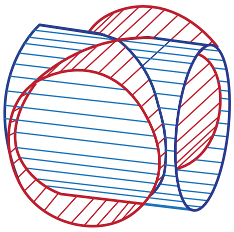
Nous avons un arbre de diamètre $d$. Nous faisons une coupe horizontale pour couper complètement l'arbre. Nous faisons ensuite une coupe à un angle de 45° par rapport à l'horizontale et nous coupons jusqu'à un diamètre de l'arbre.



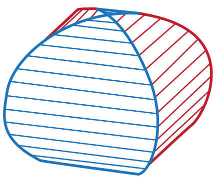

Nous remarquons que la surface $B_m$ est un triangle rectangle avec comme base $d/2$ et comme hauteur $d/2$. L'aire $B_m$ est donc donnée par $d^2/8$. De plus, les aires $B_1$ et $B_2$ sont toutes les deux égales à 0, et la hauteur du solide est égale à $d$. La formule magique nous donne donc:

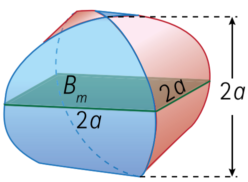
$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{d}{6}\left(0 + 4 \times \frac{d^2}{8} + 0\right) = \frac{d^3}{12}. \end{aligned}$$

## L'intersection de deux cylindres



Soit deux cylindres de rayons $a$ qui s'intersectent à angle droit. La forme produite par cette intersection se nomme un *bicylindre* ou solide de Steinmetz.






Puisque les deux cylindres sont de rayon $a$, la surface $B_m$ représentée à la figure suivante est un carré d'arête $2a$ et d'aire $4a^2$. Les aires $B_1$ et $B_2$ sont quant à elles égales à 0 et la hauteur du bicylindre est égale à $2a$.

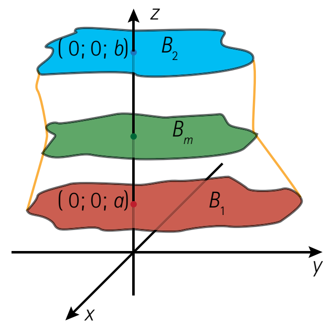
La formule magique donne donc:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(B_1 + 4B_m + B_2) \\ &= \frac{2a}{6}\left(0 + 4 \times 4a^2 + 0\right) = \frac{16a^3}{3}. \end{aligned}$$

## À quels moments peut-on appliquer la formule magique?

Nous avons vu que la formule magique peut s'appliquer à divers solides qui ne sont pas des prismatoïdes. Nous aimerions maintenant savoir sous quelles conditions la formule peut s'appliquer. Nous pouvons montrer que cette formule peut s'appliquer pour tous les solides possédant deux bases parallèles entre elles et perpendiculaires à la hauteur $z$ et tels que l'aire des sections parallèles aux bases est un polynôme en $z$ de degré inférieur ou égal à 3. Pour la lectrice ou le lecteur averti, vous aurez peut-être remarqué que la formule magique ressemble à s'y méprendre à la méthode de Simpson pour évaluer une intégrale numérique. Étant donné que la formule de Simpson est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, il n'est pas surprenant que la formule magique soit exacte également dans les mêmes conditions.

Nous allons utiliser un solide tel que présenté à la figure ci-contre. Nous avons un solide avec deux bases parallèles $B_1$ et $B_2$ et l'aire de toutes les sections à la hauteur $z$ et parallèles aux bases est donnée par un polynôme $f(z)$ de degré inférieur ou égal à 3, où $z$ représente la hauteur de la section.




Étant donné un tel solide, nous avons que $B_1 = f(a)$, $B_2 = f(b)$ et $B_m = f\left((a+b)/2\right)$. Puisque $f(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, nous avons $f(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ et nous pouvons trouver le volume du solide à l'aide de l'intégrale définie suivante:

$$V = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Nous obtenons ainsi:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \left(Az^3 + Bz^2 + Cz + D\right)dz \\ &= \left(\frac{Az^4}{4} + \frac{Bz^3}{3} + \frac{Cz^2}{2} + Dz\right)\Bigg]_a^b \\ &= \frac{A}{4}(b^4 - a^4) + \frac{B}{3}(b^3 - a^3) + \frac{C}{2}(b^2 - a^2) + D(b - a) \\ &= (b - a)\left[\frac{A}{4}(b^2 + a^2)(b + a) + \frac{B}{3}(b^2 + ba + a^2) + \frac{C}{2}(b + a) + D\right] \\ &= \frac{(b - a)}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right)\right] \\ &= \frac{(b - a)}{6}\left[B_1 + 4B_m + B_2\right]. \end{aligned}$$

Et le tour est joué !

## Conclusion

Nous avons vu comment la formule magique peut être appliquée à des volumes très divers. Il est souvent pertinent et intéressant d'apprendre des généralisations qui sont applicables à une multitude de cas particuliers. Il est également possible d'utiliser cette formule dans des cas particuliers de solides de révolution, en gardant en tête que les aires des sections doivent être représentées par des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. De plus, cette formule a été et est encore utilisée dans le calcul de volumes en génie civil, par exemple lors de la construction de routes, dans les remblais de voies ferrées et dans leur coupe, dans la construction de barrages, etc.