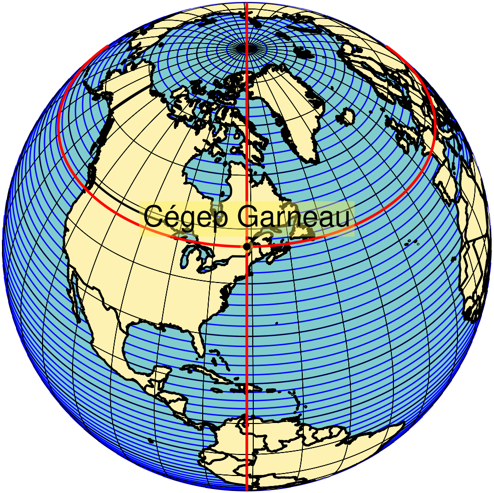
Où suis-je? Le positionnement GPS dans la classe d'algèbre linéaire

Marc-André Désautels

Département de mathématiques
Cégep de Saint-Jean-sur-Richelieu

15 octobre 2016
60e congrès de l'Association Mathématique du Québec

Table des matières


Cégep Garneau

Lignes directrices

Qu'est-ce que le GPS?

- Le Global Positioning System (GPS) (en français Système mondial de positionnement ou Géo-positionnement par Satellite) est un système de géolocalisation fonctionnant au niveau mondial et reposant sur l'exploitation de signaux radio émis par des satellites dédiés.
- Une personne munie d'un récepteur GPS peut ainsi se localiser et s'orienter sur terre, sur mer, dans l'air ou dans l'espace au voisinage proche de la Terre.

Qu'est-ce que le GPS?

- Le Global Positioning System (GPS) (en français Système mondial de positionnement ou Géo-positionnement par Satellite) est un système de géolocalisation fonctionnant au niveau mondial et reposant sur l'exploitation de signaux radio émis par des satellites dédiés.
- Une personne munie d'un récepteur GPS peut ainsi se localiser et s'orienter sur terre, sur mer, dans l'air ou dans l'espace au voisinage proche de la Terre.

Utilité

- Les applications sont multiples : navigation maritime, sur route, localisation de camions, randonnée, etc.
- Dans le milieu scientifique, voici quelques applications : géodésie, transfert de temps entre horloges atomiques, étude de l'atmosphère, etc.
- Localisation des zones orageuses chez Hydro-Québec
- Du point de vue personnel...

Utilité

- Les applications sont multiples : navigation maritime, sur route, localisation de camions, randonnée, etc.
- Dans le milieu scientifique, voici quelques applications : géodésie, transfert de temps entre horloges atomiques, étude de l'atmosphère, etc.
- Localisation des zones orageuses chez Hydro-Québec
- Du point de vue personnel...

Utilité

- Les applications sont multiples : navigation maritime, sur route, localisation de camions, randonnée, etc.
- Dans le milieu scientifique, voici quelques applications : géodésie, transfert de temps entre horloges atomiques, étude de l'atmosphère, etc.
- Localisation des zones orageuses chez Hydro-Québec
- Du point de vue personnel...

Utilité

- Les applications sont multiples : navigation maritime, sur route, localisation de camions, randonnée, etc.
- Dans le milieu scientifique, voici quelques applications : géodésie, transfert de temps entre horloges atomiques, étude de l'atmosphère, etc.
- Localisation des zones orageuses chez Hydro-Québec
- Du point de vue personnel...

Lignes directrices

Les fondements

- Le concept de GPS est basé sur le fait que la position et le temps de satellites sont connus précisément.
- Les satellites comportent des horloges atomiques extrêmement précises qui sont synchronisées entre elles.
- Les receveurs GPS possèdent des horloges beaucoup moins précises.

Les fondements

- Le concept de GPS est basé sur le fait que la position et le temps de satellites sont connus précisément.
- Les satellites comportent des horloges atomiques extrêmement précises qui sont synchronisées entre elles.
- Les receveurs GPS possèdent des horloges beaucoup moins précises.

Les fondements

- Le concept de GPS est basé sur le fait que la position et le temps de satellites sont connus précisément.
- Les satellites comportent des horloges atomiques extrêmement précises qui sont synchronisées entre elles.
- Les receveurs GPS possèdent des horloges beaucoup moins précises.

Le segment spatial

- Le segment spatial comporte 24 satellites qui se déplacent sur 6 orbites comportant 4 satellites chacune.
- Les 6 orbites sont inclinées d'environ 55° du plan de l'équateur et sont séparées de 60°.
- Les satellites parcourent une orbite en un demi jour sidéral, soit environ 11 heures et 58 minutes.
- Sur une même orbite, les satellites sont séparés de 30°, 105°, 120° et 105°.
- Les satellites se déplacent à une altitude d'environ 20 200 km.

Le segment spatial

- Le segment spatial comporte 24 satellites qui se déplacent sur 6 orbites comportant 4 satellites chacune.
- Les 6 orbites sont inclinées d'environ 55° du plan de l'équateur et sont séparées de 60°.
- Les satellites parcourent une orbite en un demi jour sidéral, soit environ 11 heures et 58 minutes.
- Sur une même orbite, les satellites sont séparés de 30°, 105°, 120° et 105°.
- Les satellites se déplacent à une altitude d'environ 20 200 km.

Le segment spatial

- Le segment spatial comporte 24 satellites qui se déplacent sur 6 orbites comportant 4 satellites chacune.
- Les 6 orbites sont inclinées d'environ 55° du plan de l'équateur et sont séparées de 60°.
- Les satellites parcourent une orbite en un demi jour sidéral, soit environ 11 heures et 58 minutes.
- Sur une même orbite, les satellites sont séparés de 30°, 105°, 120° et 105°.
- Les satellites se déplacent à une altitude d'environ 20 200 km.

Le segment spatial

- Le segment spatial comporte 24 satellites qui se déplacent sur 6 orbites comportant 4 satellites chacune.
- Les 6 orbites sont inclinées d'environ 55° du plan de l'équateur et sont séparées de 60°.
- Les satellites parcourent une orbite en un demi jour sidéral, soit environ 11 heures et 58 minutes.
- Sur une même orbite, les satellites sont séparés de 30°, 105°, 120° et 105°.
- Les satellites se déplacent à une altitude d'environ 20 200 km.

Le segment spatial

- Le segment spatial comporte 24 satellites qui se déplacent sur 6 orbites comportant 4 satellites chacune.
- Les 6 orbites sont inclinées d'environ 55° du plan de l'équateur et sont séparées de 60°.
- Les satellites parcourent une orbite en un demi jour sidéral, soit environ 11 heures et 58 minutes.
- Sur une même orbite, les satellites sont séparés de 30°, 105°, 120° et 105°.
- Les satellites se déplacent à une altitude d'environ 20 200 km.

Le segment spatial (suite)

Les orbites ont été choisies pour qu'il y ait au moins 6 satellites visibles en tout temps de n'importe quel endroit sur la Terre.

▸ Une animation des orbites

Introduction

- Les satellites envoient des signaux que le récepteur GPS reçoit.
- Ces signaux permettent de savoir à quel moment le signal a été envoyé du satellite.
- Ces signaux voyagent à la vitesse de la lumière (en pratique, il faut tenir compte d'effets relativistes, de l'atmosphère, etc.)
- Le récepteur peut donc mesurer le temps de parcours du signal et connaître la distance entre le satellite et lui.

Introduction

- Les satellites envoient des signaux que le récepteur GPS reçoit.
- Ces signaux permettent de savoir à quel moment le signal a été envoyé du satellite.
- Ces signaux voyagent à la vitesse de la lumière (en pratique, il faut tenir compte d'effets relativistes, de l'atmosphère, etc.)
- Le récepteur peut donc mesurer le temps de parcours du signal et connaître la distance entre le satellite et lui.

Introduction

- Les satellites envoient des signaux que le récepteur GPS reçoit.
- Ces signaux permettent de savoir à quel moment le signal a été envoyé du satellite.
- Ces signaux voyagent à la vitesse de la lumière (en pratique, il faut tenir compte d'effets relativistes, de l'atmosphère, etc.)
- Le récepteur peut donc mesurer le temps de parcours du signal et connaître la distance entre le satellite et lui.

Introduction

- Les satellites envoient des signaux que le récepteur GPS reçoit.
- Ces signaux permettent de savoir à quel moment le signal a été envoyé du satellite.
- Ces signaux voyagent à la vitesse de la lumière (en pratique, il faut tenir compte d'effets relativistes, de l'atmosphère, etc.)
- Le récepteur peut donc mesurer le temps de parcours du signal et connaître la distance entre le satellite et lui.

Lignes directrices

Deux satellites...

- La donnée de la distance d_1 entre un satellite S_1 et le récepteur permet de conclure que le récepteur se trouve sur une sphère de rayon d_1 centrée au satellite S_1.
- Si on connaît la distance d_2 entre le récepteur et un deuxième satellite S_2, on sait que le récepteur est aussi sur la sphère de rayon d_2 centrée en S_2.
- L'intersection de ces deux sphères est un cercle C.

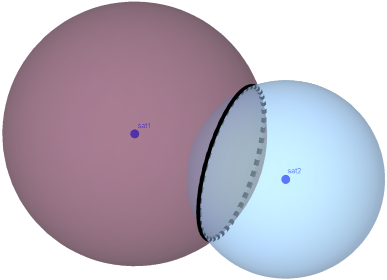
Deux satellites...

- La donnée de la distance d_1 entre un satellite S_1 et le récepteur permet de conclure que le récepteur se trouve sur une sphère de rayon d_1 centrée au satellite S_1.
- Si on connaît la distance d_2 entre le récepteur et un deuxième satellite S_2, on sait que le récepteur est aussi sur la sphère de rayon d_2 centrée en S_2.
- L'intersection de ces deux sphères est un cercle C.

Deux satellites...

- La donnée de la distance d_1 entre un satellite S_1 et le récepteur permet de conclure que le récepteur se trouve sur une sphère de rayon d_1 centrée au satellite S_1.
- Si on connaît la distance d_2 entre le récepteur et un deuxième satellite S_2, on sait que le récepteur est aussi sur la sphère de rayon d_2 centrée en S_2.
- L'intersection de ces deux sphères est un cercle C.

Deux satellites...



Un troisième satellite

- Enfin, si on connaît la distance d_3 entre le récepteur et un troisième satellite S_3, alors on sait que le récepteur est sur la sphère de rayon d_3 centrée en S_3.
- L'intersection de cette sphère avec le cercle C consiste en deux points.
- L'un de ces deux points se trouve toujours loin de la surface de la Terre (un avion est au maximum à 12 kilomètres d'altitude, ce qui est considéré proche) et est éliminé parce qu'irréaliste.
- Donc, en mesurant les temps de parcours de trois signaux depuis 3 satellites jusqu'à lui le récepteur peut calculer sa position (c-à-d. sa longitude, latitude et altitude).

Un troisième satellite

- Enfin, si on connaît la distance d_3 entre le récepteur et un troisième satellite S_3, alors on sait que le récepteur est sur la sphère de rayon d_3 centrée en S_3.
- L'intersection de cette sphère avec le cercle C consiste en deux points.
- L'un de ces deux points se trouve toujours loin de la surface de la Terre (un avion est au maximum à 12 kilomètres d'altitude, ce qui est considéré proche) et est éliminé parce qu'irréaliste.
- Donc, en mesurant les temps de parcours de trois signaux depuis 3 satellites jusqu'à lui le récepteur peut calculer sa position (c-à-d. sa longitude, latitude et altitude).

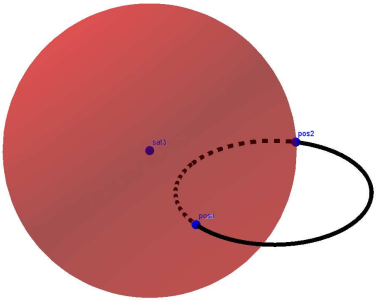
Un troisième satellite

- Enfin, si on connaît la distance d_3 entre le récepteur et un troisième satellite S_3, alors on sait que le récepteur est sur la sphère de rayon d_3 centrée en S_3.
- L'intersection de cette sphère avec le cercle C consiste en deux points.
- L'un de ces deux points se trouve toujours loin de la surface de la Terre (un avion est au maximum à 12 kilomètres d'altitude, ce qui est considéré proche) et est éliminé parce qu'irréaliste.
- Donc, en mesurant les temps de parcours de trois signaux depuis 3 satellites jusqu'à lui le récepteur peut calculer sa position (c-à-d. sa longitude, latitude et altitude).

Un troisième satellite

- Enfin, si on connaît la distance d_3 entre le récepteur et un troisième satellite S_3, alors on sait que le récepteur est sur la sphère de rayon d_3 centrée en S_3.
- L'intersection de cette sphère avec le cercle C consiste en deux points.
- L'un de ces deux points se trouve toujours loin de la surface de la Terre (un avion est au maximum à 12 kilomètres d'altitude, ce qui est considéré proche) et est éliminé parce qu'irréaliste.
- Donc, en mesurant les temps de parcours de trois signaux depuis 3 satellites jusqu'à lui le récepteur peut calculer sa position (c-à-d. sa longitude, latitude et altitude).

Un troisième satellite



En pratique

- En pratique les choses sont un peu plus compliquées, car les temps mesurés sont très petits et il faut donc faire des mesures très précises.
- En plus des 3 inconnues qui sont les coordonnées de la position du récepteur, il y a donc une quatrième inconnue : le décalage entre l'horloge du récepteur et les horloges des satellites (lequel est le même avec tous les satellites).
- Le récepteur a alors besoin d'une quatrième mesure du temps de parcours du signal entre un quatrième satellite et le récepteur.
- Il obtient alors un système de 4 équations à 4 inconnues qui sont les trois coordonnées x, y et z donnant la position du récepteur et le décalage T entre l'horloge du récepteur et celle des satellites.

En pratique

- En pratique les choses sont un peu plus compliquées, car les temps mesurés sont très petits et il faut donc faire des mesures très précises.
- En plus des 3 inconnues qui sont les coordonnées de la position du récepteur, il y a donc une quatrième inconnue : le décalage entre l'horloge du récepteur et les horloges des satellites (lequel est le même avec tous les satellites).
- Le récepteur a alors besoin d'une quatrième mesure du temps de parcours du signal entre un quatrième satellite et le récepteur.
- Il obtient alors un système de 4 équations à 4 inconnues qui sont les trois coordonnées x, y et z donnant la position du récepteur et le décalage T entre l'horloge du récepteur et celle des satellites.

En pratique

- En pratique les choses sont un peu plus compliquées, car les temps mesurés sont très petits et il faut donc faire des mesures très précises.
- En plus des 3 inconnues qui sont les coordonnées de la position du récepteur, il y a donc une quatrième inconnue : le décalage entre l'horloge du récepteur et les horloges des satellites (lequel est le même avec tous les satellites).
- Le récepteur a alors besoin d'une quatrième mesure du temps de parcours du signal entre un quatrième satellite et le récepteur.
- Il obtient alors un système de 4 équations à 4 inconnues qui sont les trois coordonnées x, y et z donnant la position du récepteur et le décalage T entre l'horloge du récepteur et celle des satellites.

En pratique

- En pratique les choses sont un peu plus compliquées, car les temps mesurés sont très petits et il faut donc faire des mesures très précises.
- En plus des 3 inconnues qui sont les coordonnées de la position du récepteur, il y a donc une quatrième inconnue : le décalage entre l'horloge du récepteur et les horloges des satellites (lequel est le même avec tous les satellites).
- Le récepteur a alors besoin d'une quatrième mesure du temps de parcours du signal entre un quatrième satellite et le récepteur.
- Il obtient alors un système de 4 équations à 4 inconnues qui sont les trois coordonnées x, y et z donnant la position du récepteur et le décalage T entre l'horloge du récepteur et celle des satellites.

Un système d'équations linéaires à résoudre

$$\left.\begin{array}{c}\text{4 satellites}\\ \Updownarrow \\ \text{4 équations}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \text{4 inconnues} \left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \\ T \end{array}\right.$$

Ce système admet encore deux solutions dont l'une est de nouveau éliminée parce que non réaliste. C'est le récepteur qui est chargé de résoudre ce système. Comme la solution inclut le décalage T entre l'horloge du récepteur et celle des satellites, le récepteur peut alors ajuster son horloge sur celle des satellites.

Simplification du problème

Pour simplifier le problème du GPS, nous utiliserons les coordonnées cartésiennes xyz, c'est-à-dire un système de coordonnées avec la Terre centrée à l'origine, l'axe des z positifs pointant vers le pôle nord, et les unités de mesure étant le rayon moyen de la Terre.

Simplification du problème

Hypothèses

Nous allons supposer que n'importe quel point sur la surface de la Terre satisfait à l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En pratique, la Terre ressemble davantage à un ellipsoïde.
Le temps sera mesuré en millisecondes (un millième de seconde ou alors 10^{-3} seconde).

Quelques constantes

Nous aurons besoin des constantes suivantes pour résoudre le problème:

$$c = 299\,792\,458\ ms^{-1} \quad \text{(vitesse de la lumière)}$$
$$R_t = 6\,378\,137\ m \quad \text{(rayon moyen de la Terre)}$$

À partir des deux constantes précédentes,nous allons définir une troisième constante, la vitesse de la lumière en unités de rayons de la Terre et en millième de seconde, que nous pouvons calculer de la manière suivante:

$$v_c = \frac{c}{1000 R_t} \approx 0,047$$

Le problème

- Vous vous trouvez à un endroit célèbre sur la planète Terre et votre GPS reçoit simultanément 4 signaux provenant de 4 satellites différents.
- Ces 4 satellites vous envoient leur position en coordonnées cartésiennes et le temps en millisecondes de l'envoi du signal.
- Un exemple vous est donné dans la table de la page suivante.
- Les nombres sont factices pour qu'il soit plus aisé de travailler avec ceux-ci, mais ils ne sont pas complètement irréalistes.

Le problème

- Vous vous trouvez à un endroit célèbre sur la planète Terre et votre GPS reçoit simultanément 4 signaux provenant de 4 satellites différents.
- Ces 4 satellites vous envoient leur position en coordonnées cartésiennes et le temps en millisecondes de l'envoi du signal.
- Un exemple vous est donné dans la table de la page suivante.
- Les nombres sont factices pour qu'il soit plus aisé de travailler avec ceux-ci, mais ils ne sont pas complètement irréalistes.

Le problème

- Vous vous trouvez à un endroit célèbre sur la planète Terre et votre GPS reçoit simultanément 4 signaux provenant de 4 satellites différents.
- Ces 4 satellites vous envoient leur position en coordonnées cartésiennes et le temps en millisecondes de l'envoi du signal.
- Un exemple vous est donné dans la table de la page suivante.
- Les nombres sont factices pour qu'il soit plus aisé de travailler avec ceux-ci, mais ils ne sont pas complètement irréalistes.

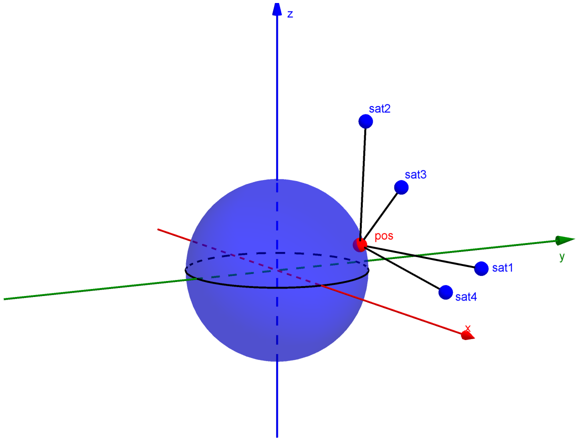
Le problème

- Vous vous trouvez à un endroit célèbre sur la planète Terre et votre GPS reçoit simultanément 4 signaux provenant de 4 satellites différents.
- Ces 4 satellites vous envoient leur position en coordonnées cartésiennes et le temps en millisecondes de l'envoi du signal.
- Un exemple vous est donné dans la table de la page suivante.
- Les nombres sont factices pour qu'il soit plus aisé de travailler avec ceux-ci, mais ils ne sont pas complètement irréalistes.

Les données

Satellite	Position *xyz*	Temps d'envoi du signal
1	$(1, 2, 0)$	$19,9$
2	$(2, 0, 2)$	$2,4$
3	$(1, 1, 1)$	$32,6$
4	$(2, 1, 0)$	$19,9$

Les positions des satellites



Lignes directrices

Le système d'équations non-linéaires

Soit (x, y, z) la position du GPS sur la Terre et t le temps où les signaux arrivent au GPS. Soit d_i la distance entre le récepteur GPS et le satellite i. Pour le satellite 1, nous pouvons mesurer d_1 en calculant la distance parcourue par le signal entre le moment où il a été émis et le moment où il a été reçu. Nous avons:

$$d_1 = v_c(t - 19,9)$$

Si nous utilisons la distance euclidienne, nous avons:

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}$$

Le système d'équations non-linéaires

Soit (x, y, z) la position du GPS sur la Terre et t le temps où les signaux arrivent au GPS. Soit d_i la distance entre le récepteur GPS et le satellite i. Pour le satellite 1, nous pouvons mesurer d_1 en calculant la distance parcourue par le signal entre le moment où il a été émis et le moment où il a été reçu. Nous avons:

$$d_1 = v_c\,(t - 19,9)$$

Si nous utilisons la distance euclidienne, nous avons:

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}$$

Le système d'équations non-linéaires

Soit (x, y, z) la position du GPS sur la Terre et t le temps où les signaux arrivent au GPS. Soit d_i la distance entre le récepteur GPS et le satellite i. Pour le satellite 1, nous pouvons mesurer d_1 en calculant la distance parcourue par le signal entre le moment où il a été émis et le moment où il a été reçu. Nous avons:

$$d_1 = v_c\,(t - 19,9)$$

Si nous utilisons la distance euclidienne, nous avons:

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}$$

Le système d'équations non-linéaires

Soit (x, y, z) la position du GPS sur la Terre et t le temps où les signaux arrivent au GPS. Soit d_i la distance entre le récepteur GPS et le satellite i. Pour le satellite 1, nous pouvons mesurer d_1 en calculant la distance parcourue par le signal entre le moment où il a été émis et le moment où il a été reçu. Nous avons:

$$d_1 = v_c\,(t - 19,9)$$

Si nous utilisons la distance euclidienne, nous avons:

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}$$

En combinant les deux équations précédentes, nous avons:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2} = v_c\,(t-19,9)$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2 = v_c^2\,(t-19,9)^2 \qquad (1)$$

Si nous développons et réarrangons les termes pour que les variables linéaires soient à gauche du symbole d'égalité, nous obtenons:

$$2x+4y+0z-2v_c^2(19.9)t = 1^2+2^2+0^2-v_c^2(19,9)^2 + x^2+y^2+z^2-v_c^2t^2$$

En combinant les deux équations précédentes, nous avons:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2} = v_c\,(t-19,9)$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2 = v_c^2\,(t-19,9)^2 \qquad (1)$$

Si nous développons et réarrangons les termes pour que les variables linéaires soient à gauche du symbole d'égalité, nous obtenons:

$$2x+4y+0z-2v_c^2(19.9)t = 1^2+2^2+0^2-v_c^2(19,9)^2 + x^2+y^2+z^2-v_c^2t^2$$

En combinant les deux équations précédentes, nous avons:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2} = v_c\,(t-19,9)$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2 = v_c^2\,(t-19,9)^2 \qquad (1)$$

Si nous développons et réarrangons les termes pour que les variables linéaires soient à gauche du symbole d'égalité, nous obtenons:

$$2x+4y+0z-2v_c^2(19.9)t = 1^2+2^2+0^2-v_c^2(19,9)^2 + x^2+y^2+z^2-v_c^2t^2$$

En combinant les deux équations précédentes, nous avons:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2} = v_c\,(t-19,9)$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2 = v_c^2\,(t-19,9)^2 \qquad (1)$$

Si nous développons et réarrangons les termes pour que les variables linéaires soient à gauche du symbole d'égalité, nous obtenons:

$$\begin{aligned} 2x+4y+0z-2v_c^2(19.9)t = {} & 1^2+2^2+0^2-v_c^2(19,9)^2 \\ & +x^2+y^2+z^2-v_c^2t^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons trouver des équations similaires pour les trois autres satellites.

$$
\begin{aligned}
2x + 4y + 0z - 2v_c^2(19,9)t &= 1^2 + 2^2 + 0^2 - v_c^2(19,9)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\
4x + 0y + 4z - 2v_c^2(2,4)t &= 2^2 + 0^2 + 2^2 - v_c^2(2,4)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\
2x + 2y + 2z - 2v_c^2(32,6)t &= 1^2 + 1^2 + 1^2 - v_c^2(32,6)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\
4x + 2y + 0z - 2v_c^2(19,9)t &= 2^2 + 1^2 + 0^2 - v_c^2(19,9)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2
\end{aligned}
$$

Nous pouvons trouver des équations similaires pour les trois autres satellites.

$$\begin{aligned}
2x + 4y + 0z - 2v_c^2(19,9)t &= 1^2 + 2^2 + 0^2 - v_c^2(19,9)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\
4x + 0y + 4z - 2v_c^2(2,4)t &= 2^2 + 0^2 + 2^2 - v_c^2(2,4)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\
2x + 2y + 2z - 2v_c^2(32,6)t &= 1^2 + 1^2 + 1^2 - v_c^2(32,6)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\
4x + 2y + 0z - 2v_c^2(19,9)t &= 2^2 + 1^2 + 0^2 - v_c^2(19,9)^2 \\
&\quad + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2
\end{aligned}$$

Nous pouvons trouver des équations similaires pour les trois autres satellites.

$$2x + 4y + 0z - 2v_c^2(19,9)t = 1^2 + 2^2 + 0^2 - v_c^2(19,9)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$$

$$4x + 0y + 4z - 2v_c^2(2,4)t = 2^2 + 0^2 + 2^2 - v_c^2(2,4)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$$

$$2x + 2y + 2z - 2v_c^2(32,6)t = 1^2 + 1^2 + 1^2 - v_c^2(32,6)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$$

$$4x + 2y + 0z - 2v_c^2(19,9)t = 2^2 + 1^2 + 0^2 - v_c^2(19,9)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$$

Le système d'équations linéaires

Le terme $x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$ est le même pour toutes les équations. Nous pouvons l'éliminer en soustrayant la première équation des trois autres.

$$2x - 4y + 4z - 2v_c^2(17,5)t = 8 - 5 + v_c^2\left(19,9^2 - 2,4^2\right)$$
$$0x - 2y + 2z - 2v_c^2(12,7)t = 3 - 5 + v_c^2\left(19,9^2 - 32,6^2\right)$$
$$2x - 2y + 0z - 2v_c^2(0)t = 5 - 5 + v_c^2\left(19,9^2 - 19,9^2\right)$$

Le système d'équations linéaires

Le terme $x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$ est le même pour toutes les équations. Nous pouvons l'éliminer en soustrayant la première équation des trois autres.

$$
\begin{aligned}
2x - 4y + 4z - 2v_c^2(17,5)t &= 8 - 5 + v_c^2\left(19,9^2 - 2,4^2\right)\\
0x - 2y + 2z - 2v_c^2(12,7)t &= 3 - 5 + v_c^2\left(19,9^2 - 32,6^2\right)\\
2x - 2y + 0z - 2v_c^2(0)t &= 5 - 5 + v_c^2\left(19,9^2 - 19,9^2\right)
\end{aligned}
$$

L'ensemble solution

Il est possible de résoudre le système d'équations linéaires précédent en exprimant 3 des variables à l'aide de la quatrième. Une fois que la méthode de Gauss suivie d'une substitution arrière est effectuée, nous obtenons:

$$x = 5,41 - 0,095t$$
$$y = 5,41 - 0,095t$$
$$z = 3,67 - 0,067t$$

L'ensemble solution

Il est possible de résoudre le système d'équations linéaires précédent en exprimant 3 des variables à l'aide de la quatrième. Une fois que la méthode de Gauss suivie d'une substitution arrière est effectuée, nous obtenons:

$$x = 5,41 - 0,095t$$
$$y = 5,41 - 0,095t$$
$$z = 3,67 - 0,067t$$

L'équation quadratique

Si nous substituons l'ensemble solution précédent dans l'équation 1 du premier satellite, nous obtenons:

$$(4,41-0,095t)^2+(3,41-0,095t)^2+(3,67-0,067t)^2=0,047^2\,(t-19,9)^2$$

qui se simplifie en:

$$0,02t^2-1,88t+43,56=0$$

Cette équation quadratique possède deux solutions réelles, $t_1=43,1$ et $t_2=50,0$.

L'équation quadratique

Si nous substituons l'ensemble solution précédent dans l'équation 1 du premier satellite, nous obtenons:

$$(4,41-0,095t)^2+(3,41-0,095t)^2+(3,67-0,067t)^2=0,047^2\,(t-19,9)^2$$

qui se simplifie en:

$$0,02t^2-1,88t+43,56=0$$

Cette équation quadratique possède deux solutions réelles, $t_1=43,1$ et $t_2=50,0$.

L'équation quadratique

Si nous substituons l'ensemble solution précédent dans l'équation 1 du premier satellite, nous obtenons:

$$(4,41 - 0,095t)^2 + (3,41 - 0,095t)^2 + (3,67 - 0,067t)^2 = 0,047^2\,(t - 19,9)^2$$

qui se simplifie en:

$$0,02t^2 - 1,88t + 43,56 = 0$$

Cette équation quadratique possède deux solutions réelles, $t_1 = 43,1$ et $t_2 = 50,0$.

L'équation quadratique

Si nous substituons l'ensemble solution précédent dans l'équation 1 du premier satellite, nous obtenons:

$$(4,41 - 0,095t)^2 + (3,41 - 0,095t)^2 + (3,67 - 0,067t)^2 = 0,047^2\,(t - 19,9)^2$$

qui se simplifie en:

$$0,02t^2 - 1,88t + 43,56 = 0$$

Cette équation quadratique possède deux solutions réelles, $t_1 = 43,1$ et $t_2 = 50,0$.

Laquelle des deux solutions?

Pour connaître laquelle des deux solutions est la bonne, il faut calculer la longueur du vecteur obtenu, pour que celui-ci se trouve près de la Terre. En remplaçant dans l'ensemble solution, nous avons:

- $t_1 = 43,1$ donne $(1,317,\ 1,317,\ 0,790)$ mais ce point se trouve à une distance d'environ 2 rayons de la Terre.
- $t_1 = 50,0$ donne $(0,667,\ 0,667,\ 0,332)$ et ce point se trouve à une distance d'environ 0,9997 rayon de la Terre.

Nous connaissons maintenant les coordonnées cartésiennes de notre position.

Laquelle des deux solutions?

Pour connaître laquelle des deux solutions est la bonne, il faut calculer la longueur du vecteur obtenu, pour que celui-ci se trouve près de la Terre. En remplaçant dans l'ensemble solution, nous avons:

- $t_1 = 43,1$ donne $(1,317,\ 1,317,\ 0,790)$ mais ce point se trouve à une distance d'environ 2 rayons de la Terre.
- $t_1 = 50,0$ donne $(0,667,\ 0,667,\ 0,332)$ et ce point se trouve à une distance d'environ 0,9997 rayon de la Terre.

Nous connaissons maintenant les coordonnées cartésiennes de notre position.

Laquelle des deux solutions?

Pour connaître laquelle des deux solutions est la bonne, il faut calculer la longueur du vecteur obtenu, pour que celui-ci se trouve près de la Terre. En remplaçant dans l'ensemble solution, nous avons:

- $t_1 = 43,1$ donne $(1,317,\ 1,317,\ 0,790)$ mais ce point se trouve à une distance d'environ 2 rayons de la Terre.
- $t_1 = 50,0$ donne $(0,667,\ 0,667,\ 0,332)$ et ce point se trouve à une distance d'environ 0,9997 rayon de la Terre.

Nous connaissons maintenant les coordonnées cartésiennes de notre position.

Laquelle des deux solutions?

Pour connaître laquelle des deux solutions est la bonne, il faut calculer la longueur du vecteur obtenu, pour que celui-ci se trouve près de la Terre. En remplaçant dans l'ensemble solution, nous avons:

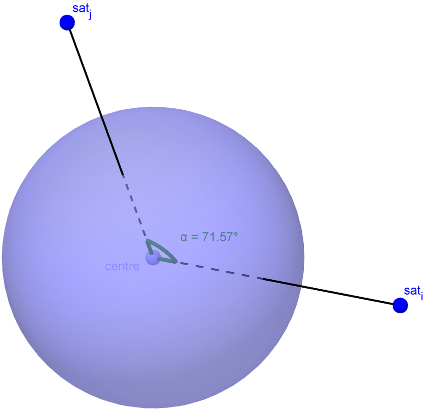
- $t_1 = 43,1$ donne $(1,317,\ 1,317,\ 0,790)$ mais ce point se trouve à une distance d'environ 2 rayons de la Terre.
- $t_1 = 50,0$ donne $(0,667,\ 0,667,\ 0,332)$ et ce point se trouve à une distance d'environ 0,9997 rayon de la Terre.

Nous connaissons maintenant les coordonnées cartésiennes de notre position.

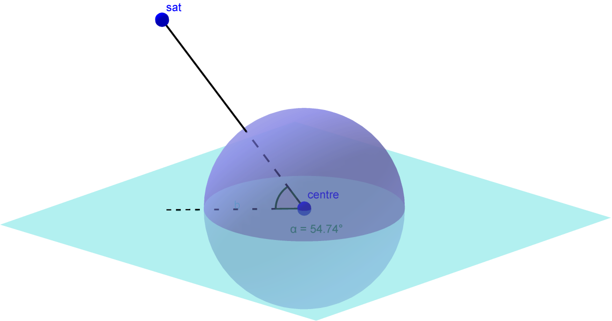
Maintenant que nous savons résoudre le problème du GPS, nous pouvons poser plusieurs questions aux étudiants.

Lignes directrices

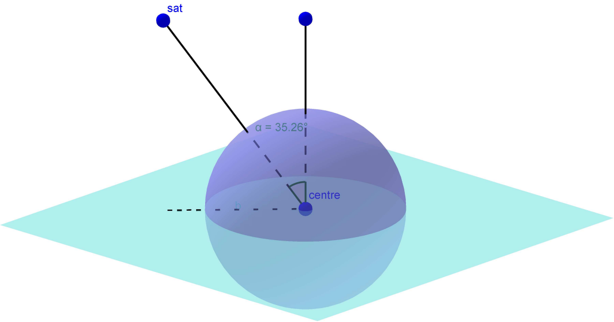
Trouvez l'angle (en degrés) formé par le satellite i, le centre de la Terre et le satellite j.



Trouvez l'angle (en degrés) formé par le satellite i, le centre de la Terre et le plan de l'équateur.



Trouvez l'angle (en degrés) formé par le satellite i, le centre de la Terre et le nord géographique.

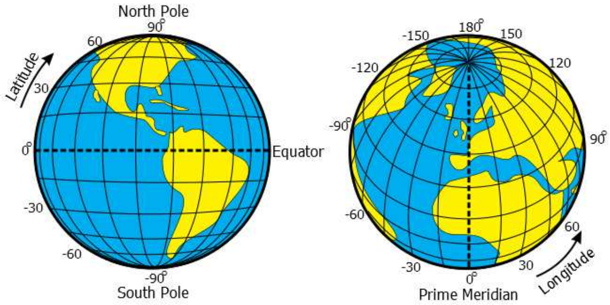


Lignes directrices

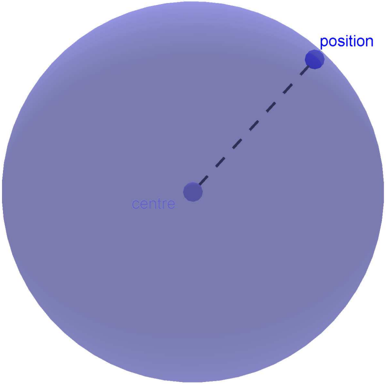
Une fois les coordonnées cartésiennes trouvées, il faut les transformer en latitude et longitude.

- On calcule $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $latitude = \text{Arcsin}\left(\frac{z}{r}\right)$
- $longitude = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

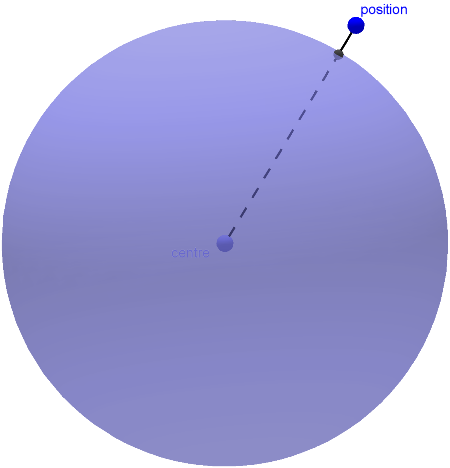
Longitude et latitude



Donnez la distance entre votre position et le centre de la Terre.



Donnez l'altitude de votre position.



Lignes directrices

Il est encore possible d'améliorer ce devoir en ajoutant certaines questions.

- Ajouter des endroits où nous pouvons nous trouver. Par exemple, le sommet de l'himalaya, l'épave du Titanic, etc.
- Ajouter des questions portant sur la perturbation du signal. Par exemple, qu'arrive-t-il à votre position calculée si nous introduisons des erreurs de l'ordre du kilomètre et du millionième de seconde dans les données des satellites?
- Se poser la question à savoir si les satellites sont bel et bien au-dessus de l'horizon? La réponse est non car dans ma construction de données factices, je ne mets pas cette contrainte.

Il est encore possible d'améliorer ce devoir en ajoutant certaines questions.

- Ajouter des endroits où nous pouvons nous trouver. Par exemple, le sommet de l'himalaya, l'épave du Titanic, etc.
- Ajouter des questions portant sur la perturbation du signal. Par exemple, qu'arrive-t-il à votre position calculée si nous introduisons des erreurs de l'ordre du kilomètre et du millionième de seconde dans les données des satellites?
- Se poser la question à savoir si les satellites sont bel et bien au-dessus de l'horizon? La réponse est non car dans ma construction de données factices, je ne mets pas cette contrainte.

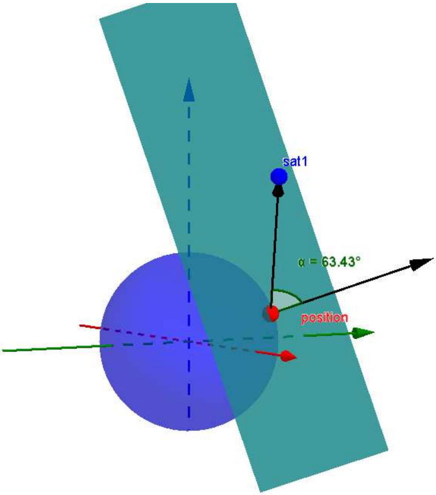
Il est encore possible d'améliorer ce devoir en ajoutant certaines questions.

- Ajouter des endroits où nous pouvons nous trouver. Par exemple, le sommet de l'himalaya, l'épave du Titanic, etc.
- Ajouter des questions portant sur la perturbation du signal. Par exemple, qu'arrive-t-il à votre position calculée si nous introduisons des erreurs de l'ordre du kilomètre et du millionième de seconde dans les données des satellites?
- Se poser la question à savoir si les satellites sont bel et bien au-dessus de l'horizon? La réponse est non car dans ma construction de données factices, je ne mets pas cette contrainte.

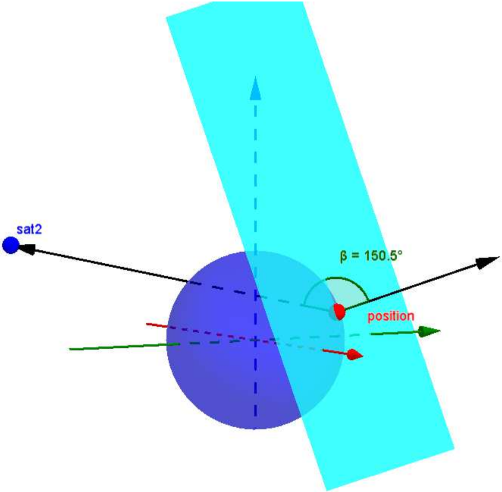
Comment décider si un satellite est au-dessus de l'horizon par rapport à notre position? On peut par exemple, calculer l'angle entre le vecteur normal au plan tangent à la sphère à notre position et le vecteur pointant de notre position vers le satellite.

Comment décider si un satellite est au-dessus de l'horizon par rapport à notre position? On peut par exemple, calculer l'angle entre le vecteur normal au plan tangent à la sphère à notre position et le vecteur pointant de notre position vers le satellite.

Le satellite est au-dessus de l'horizon.



Le satellite n'est pas au-dessus de l'horizon.



Lignes directrices

Voici quelques ressources mises à votre disposition si vous désirez utiliser ce matériel en classe.

- MAXIMA pour le calcul symbolique
- http://maxima.sourceforge.net/
- GeoGebra pour les animations et les figures
- https://www.geogebra.org/home

Voici quelques ressources mises à votre disposition si vous désirez utiliser ce matériel en classe.

- MAXIMA pour le calcul symbolique
- `http://maxima.sourceforge.net/`
- GeoGebra pour les animations et les figures
- `https://www.geogebra.org/home`

Voici quelques ressources mises à votre disposition si vous désirez utiliser ce matériel en classe.

- MAXIMA pour le calcul symbolique
- `http://maxima.sourceforge.net/`
- GeoGebra pour les animations et les figures
- `https://www.geogebra.org/home`

Voici quelques ressources mises à votre disposition si vous désirez utiliser ce matériel en classe.

- MAXIMA pour le calcul symbolique
- `http://maxima.sourceforge.net/`
- GeoGebra pour les animations et les figures
- `https://www.geogebra.org/home`

Lignes directrices

Tous les documents se trouvent à l'adresse suivante:

`http://bit.ly/GPS_AMQ_2016`

1. Un fichier d'explications et de questions pour les étudiants
2. Un fichier contenant 500 données aléatoires ainsi que les réponses
3. Un fichier MAXIMA type pour la résolution des problèmes
4. Le fichier de cette présentation
5. Des figures et animations GeoGebra

Tous les documents se trouvent à l'adresse suivante:

`http://bit.ly/GPS_AMQ_2016`

1. Un fichier d'explications et de questions pour les étudiants
2. Un fichier contenant 500 données aléatoires ainsi que les réponses
3. Un fichier MAXIMA type pour la résolution des problèmes
4. Le fichier de cette présentation
5. Des figures et animations GeoGebra

Tous les documents se trouvent à l'adresse suivante:

`http://bit.ly/GPS_AMQ_2016`

1. Un fichier d'explications et de questions pour les étudiants
2. Un fichier contenant 500 données aléatoires ainsi que les réponses
3. Un fichier MAXIMA type pour la résolution des problèmes
4. Le fichier de cette présentation
5. Des figures et animations GeoGebra

Tous les documents se trouvent à l'adresse suivante:

`http://bit.ly/GPS_AMQ_2016`

1. Un fichier d'explications et de questions pour les étudiants
2. Un fichier contenant 500 données aléatoires ainsi que les réponses
3. Un fichier MAXIMA type pour la résolution des problèmes
4. Le fichier de cette présentation
5. Des figures et animations GeoGebra

Tous les documents se trouvent à l'adresse suivante:

`http://bit.ly/GPS_AMQ_2016`

1. Un fichier d'explications et de questions pour les étudiants
2. Un fichier contenant 500 données aléatoires ainsi que les réponses
3. Un fichier MAXIMA type pour la résolution des problèmes
4. Le fichier de cette présentation
5. Des figures et animations GeoGebra

Lignes directrices

Je tiens à remercier Monsieur Paul Dumais qui m'a donné l'aimable autorisation de présenter le fruit de mon travail. Lors du cinquante-quatrième congrès de l'AMQ, Monsieur Dumais avait décrit de quelle façon il utilisait le GPS dans sa classe d'algèbre. Vous pouvez trouver un compte-rendu de son atelier à l'adresse suivante:

`http://bit.ly/DumaisGPS`

Lignes directrices